高等学校数学の考え方の理解のための指導法について
―実感的な理解に向けた指導法の一考察―

伊藤　眞人

1．はじめに

平成30年３月30日に高等学校学習指導要領が改訂され，平成31年度から一部を移行措置として先行実施，平成34（令和４）年度から年次進行で本格実施することになっている。

ほぼ10年ごとに改訂されてきた高等学校学習指導要領であるが，今回の改訂は平成28年12月21日に出された中央教育審議会答申に基づいているだけでなく，この間の論議等に留意する必要がある。

我が国の義務教育期間は小学校，中学校の９年間であるが，すでに長い間，中学校卒業者の高等学校への進学は，ほぼ準義務教育化されていると言っても過言でない状況であり，さらに高等学校卒業後，その多くが専修学校，大学への進学を希望する状況がある。

平成26年12月22日に「新しい時代にふさわしい高大接続の実現に向けた高等学校教育，大学教育，大学入学者選抜の一体的改革について」という中央教育審議会答申が出された。これは義務教育に続くものとして高等学校教育を捉える，というより，大学進学を前提とした学校教育として捉えている答申であり，「高等学校教育の改革と大学教育の改革，それを繋ぐ大学入学者選抜の改革」を三者一体として改革していくべきである，という主張である。翌平成27年１月16日には，この答申の中で提言されている「高大接続改革実行プラン」が文部科学大臣決定として定められた。

高等学校学習指導要領を高等学校教育の基準としての位置づけというより大学進学を前提として検討するということについては，その後のいわゆる新テスト「高等学校基礎学力テスト（仮称）」及び「大学入学希望者学力評価テスト（仮称）」の実施について企図したことからも，高等学校教育現場において途惑いを生じることとなった，と思う。

これらの新テストの実施の是非について，改めてここで論じることはしないが，大学入

試センター試験の後継試験として位置づけられた大学入学共通テストに関する最近の状況を見るにつけ感じることは，教育改革は容易なことではない，ということである。

今回，高等学校学習指導要領の改訂に伴い，高等学校学習指導要領の冊子を手にして感じたことは，その記載の分量の多さであり，前回改定時の冊子と比しても倍くらいの厚さになっていたことに正直驚いた。やはり，文部科学省としては，大学改革や大学入試改革とともに，高等学校教育の改革が大きなねらいなのだと感じられる。

そこで，改めて，今回の高等学校学習指導要領の改訂に向けた論議に関するものとして，平成26年6月にまとめられた中央教育審議会「初等中等教育分科会高等学校教育部会審議まとめ～高校教育の質の確保・向上に向けて～」（以下，「審議まとめ～高校教育の質の確保・向上に向けて～」）に注目してみることにした。

この「審議まとめ～高校教育の質の確保・向上に向けて～」の「第１章　生徒をめぐる現状とこれまでの取組」では，生徒を取り巻く状況の変化として，（１）生徒の多様化，（２）基礎学力の不足と学習意欲の低さ，（３）大学入試の選抜機能の低下，について記している。

これについては，戦後の高度成長期を経て高校進学率も上昇し，その後の人口増加に伴い毎年のように公立高校を開校させ（その多くが普通科高校），まさに多様な生徒が高校生となった高校現場で教員をしてきた者として，実感をもって思い出すことができる。

ここで指摘されている「（２）基礎学力の不足と学習意欲の低さ」について，高校教員経験者として否定しにくい面はあるが，そのことに対し決して手をこまねいていたわけではない，と自負している。しかし，高校生としての生徒の多様化は時代を反映し，併せて実施された高等学校学習指導要領の改訂による必履修科目の多様化や必履修単位数減により，高校教育の内容について，それまでの価値観を変えることを求められることとなった。

生徒数の増加，学校数の増加は，教職員数の確保という面でも連動しており，教員養成大学出身者でなくとも一定の高等学校教科の教職課程の修了を経て教員免許を取得できることから，それまで以上に多様な学習経歴や経験を持つ高校教員が増加することになった。

そのことが理由ではないとしても，生徒の多様化，教員の多様化と，価値観の多様化，そして大学進学率の上昇とともに，高校教育の指向性として大学入試の合格のために入学試験にない教科・科目の学習をやや軽視しかねない風潮も助長されてきたのではないか，と感じている。

文系，理系，という別は何をもって為されるのか，やや疑問ではあるが，高等学校のカリキュラム編成において，大学受験を意識し，必履修としての共通教科・科目の学習後，

２年次からそれを分けて学習するコース設定は多くの普通高校で行われていることと思う。数学科教員として文系クラスを希望した生徒に数学の学習の重要性，必要性を説きながら，生徒が大学受験に向け他の教科・科目へのエネルギーを割きたいがために数学の授業に臨む姿勢や意欲が薄らいでいくことに，悔しい思いをしてきた記憶もある。

数学が苦手という生徒に対して，単元内容の学習，指導の中で，公式を覚え，それに当てはめることで答えを導く，という授業スタイルを時には離れることができなかった反省もあり，今回の学習指導要領の改訂を機に，改めて数学の学習や指導についての考え方について考察することを試みることとした。

２．高校における数学科の目標について

平成21年３月９日改訂の高等学校学習指導要領では数学科の目標は，次のように記されている。

数学的活動を通して，数学における基本的な概念や原理･法則の体系的な理解を深め，事象を数学的に考察し表現する能力を高め創造性の基礎を培うとともに，数学のよさを認識しそれらを積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断する態度を育てる。

これに対して，平成30年３月30日に改訂された今回の高等学校学習指導要領の数学科の目標は，次のように記されている。

（１）数学における基本的な概念や原理・法則を体系的に理解するとともに，事象を数学化したり，数学的に解釈したり，数学的に表現・処理したりする技能を身に付けるようにする。
（２）数学を活用して事象を論理的に考察する力，事象の本質や他の事象との関係を認識し統合的・発展的に考察する力，数学的な表現を用いて事象を簡潔・明瞭・的確に表現する力を養う。
（３）数学のよさを認識し積極的に数学を活用しようとする態度，粘り強く考え数学的論拠に基づいて判断しようとする態度，問題解決の過程を振り返って考察を深めたり，評価・改善したりしようとする態度や創造性の基礎を養う。

この高等学校学習指導要領の数学科の目標の記載の違いからも，高等学校の数学科教育の改善を強く求めていることが感じられる。すなわち，公式に当てはめて答えがでるのが

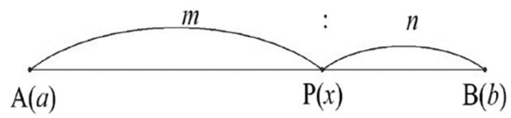
数学だという認識ではいけない，ということであり，生徒に対する教授側の数学観が問われることになる，ということである。

そこで，特に初学者に対する単元指導の導入において，「（１）数学における基本的な概念や原理・法則を体系的に理解するとともに，事象を数学化したり，数学的に解釈したり，数学的に表現・処理したりする技能を身に付けるようにする。」ということがどういうことであるのかを，具体的な単元指導を例に考察してみることにする。

３．線分の内分点，外分点の指導について

ここでは例として，数学Ⅱの「図形と方程式」において，座標を導入後の単元として，線分の内分点，外分点を取りあげてみる。

図１（内分）



まず，線分の内分について定義する。

$m > 0$，$n > 0$とする。

点Pが線分AB上にあって，

$AP : PB = m : n$　　（長さの比）

が成り立つとき，点Pは線分ABを$m : n$に内分するといい，Pを内分点という。（図１）

このとき，線分ABに対しては，点Aから点Bに向かうという意味を込めて，線分ABを向きのある線分（有向線分）として考えることが適切である。例えば，線分ABを5 : 3の比に内分することと，線分BAを5 : 3の比に内分することは異なることに留意する。

なお，高校数学における有向線分は，ベクトルの単元において向きを指定する線分として改めて定義されるが，ここできちんと概念として導入する方が自然である。

図１のように点Pが線分ABを$m : n$に内分する点であるとき，A(a)，B(b)，P(x) に対して，$a < b$として，AP$= x - a$，PB$= b - x$であることから　　（長さとして）

$(x - a) : (b - x) = m : n$

比の性質から，$m\ (b - x) = n\ (x - a)$

これをxについて解くと，

$$x = \frac{n\,a + m\,b}{m + n}$$

図２

$na \quad + \quad m\,b$

$m \quad + \quad n$

このときに，分母の$m : n$の比の順に対して，分子は比がnとmの順が交差（クロス）するように捉えるとわかりやすい。（図２）

次に線分の外分について定義する。

$m>0$，$n>0$，$m \neq n$ とする

点Pが線分ABの延長上にあって，

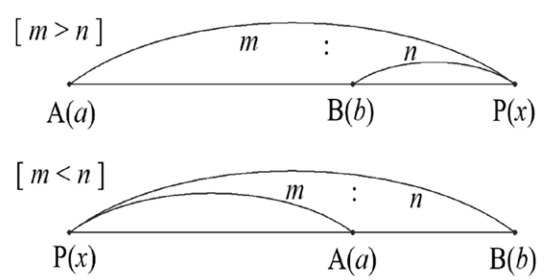
$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=m:n$　　（長さの比）

が成り立つとき，点Pは線分ABを $m:n$ に外分するといい，Pを外分点という。

線分ABの延長上に点Pがくることから，$m \neq n$ でなければならないことに留意する。

$m>n$ のときと $m<n$ のときとでは，外分する点Pの位置が線分ABの延長上にあるとはいっても，点A，Bのどちらの側にあるのか，逆の位置となることが重要であり，その違いがなかなか理解しにくい生徒も少なくない。（図３）

図３（外分）



例えば，線分ABを 5 : 3 の比に外分することと，線分ABを 3 : 5 の比に外分することが異なることに留意する。

$a<b$ として，外分点を求める式を求めることにする。

$m>n$ のときは，$\mathrm{AP}=x-a$，$\mathrm{PB}=x-b$ であることから　　（長さとして）

$(x-a):(x-b)=m:n$

比の性質から，$m\,(x-b)=n\,(x-a)$

これを x を左辺に寄せて解くと，

$$x=\frac{-na+mb}{m-n}$$

一方，$m<n$ のときは，$\mathrm{AP}=a-x$，$\mathrm{PB}=b-x$ であることから　　（長さとして）

$(a-x):(b-x)=m:n$

比の性質から，$m\,(b-x)=n\,(a-x)$

これを x を左辺に寄せて解くと，

$$x=\frac{na-mb}{-m+n}$$

この式の分母分子に－1をかけることで

$$x = \frac{-na + mb}{m - n} \qquad \cdots (※)$$

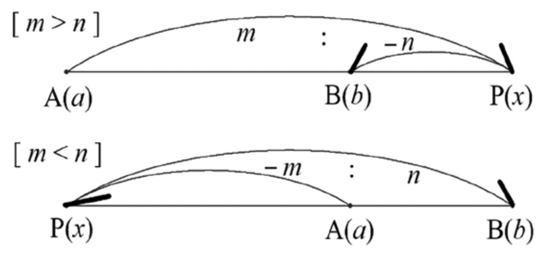
を得ることができるので，教科書では，外分については，２通りの図を示している場合であっても，得られる式として（※）の式のみの一つだけで済ませている説明がある。

ここで，内分の式と外分の式が似ていることに気づけば，次の考察に繋がる。

すなわち，線分ABは有向線分であり，内分も外分も，点Aから点Pを経て点Bに到達する，とみなすことができる。A→P→Bを意識するのである。（図４）

内分の場合は，点A，P，Bと順に同じ向きに辿っていけるため，ほぼ違和感なく内分の式を理解することができる。外分について教科書では，内分の式の n を $-n$ で置き換えればいい，と説明していることが多いようである。２通りの図であってもこの一通りの置き換えの式（※）で説明している。

図４（外分）



実は，得られた結果の式から，外分の場合，内分の式において単純に置き換えるということではなく，「nを$-n$で置き換える」意味を「逆向きを負符号で表すことができる」という数学的な意味を意識させ説明することで理解することができ，まさに数学的な考え方のよさ，を実感できるということになるのである。

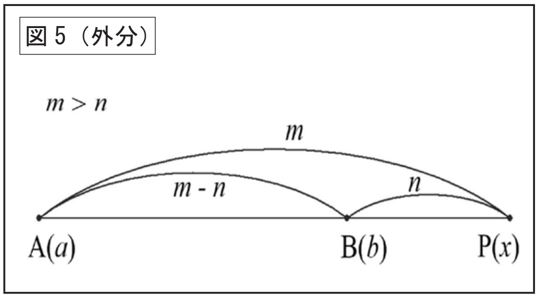
すなわち，点をA→P→Bと辿っていく際に，有向線分ABの向きとは逆に辿ることになることについて，逆向きを負符号「－」を用いることに意味がある，と理解できるということである。

外分の場合，m，nの大小関係を考慮して，点A，P，Bの位置関係を図４のような略図を自分で書いてみることにより，点A→P→Bと辿る際に線分ABの向きに対して，点Pを大きく通り過ぎて逆向きに戻る（マイナス「－」），あるいは逆向きに下がって（マイナス「－」）から大きく跳躍する，というような感覚として，その際の比を負数として捉えれば，実は内分の式をそのまま活用することができることが，実感をもって理解できることになる。

$$x = \frac{(-n)\,a + m\,b}{m + (-n)} \qquad \text{あるいは} \qquad x = \frac{n\,a + (-m)\,b}{(-m) + n}$$

さらに，次のようなことを外分に関して学習することも意味のあることである。

$m > n$のとき線分ABを $m : n$ の比に外分する点Pについて，線分APを（$m - n$）: nの比に内分する点として点Bを捉えることで，内分点を求める式に当てはめることができる。（図５）



$$b = \frac{n\,a + (m - n)\,x}{(m - n) + n}$$

分母を払い，

$$m\,b = n\,a + (m - n)\,x$$

この両辺を入換え，xについて解くと，

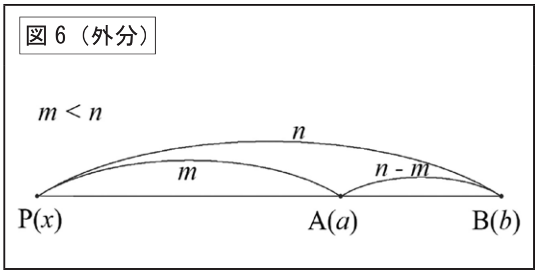
$$(m - n)\,x = -\,n\,a + m\,b$$

であることから，外分の式

$$x = \frac{(-n)\,a + m\,b}{m + (-n)}$$

を得ることができる。

もちろん$m < n$のとき線分ABを$m : n$ の比に外分する点Pについても同様に考えることができる。（図６）



$$a = \frac{(n - m)\,x + m\,b}{m + (n - m)}$$

分母を払い，

$$n\,a = (n - m)\,x + m\,b$$

この両辺を入換え，xについて解くと，

$$(n - m)\,x = n\,a - m\,b$$

$$x = \frac{n\,a + (-m)\,b}{(-m) + n}$$

を得て，線分ABを $m : n$ の比に外分する点Pを求めることができる。

これらのことから線分ABを $m : n$ の比に内分する，外分する点として，特に線分ABの向きを意識することで内分，外分を統一的な考え方で捉えることができるといって差し支えないことが理解できよう。

なお，$m = n$のときに，線分ABの中点として点Pを捉えることができることは言うまでもない。このとき，

$$x = \frac{a+b}{2}$$

である。

線分ABを$m:n$の比に分ける点として，m，nが同符号の場合は内分，異符号の場合は外分となることも指導できるであろう。

数学的な考え方として，内分点を求める式の包含として中点を求める式，拡張として外分点を求める式，というように考えることもできることに気づくよう指導することに意義があり，何もかも公式を覚え，その理由や根拠，考え方の是非を意識せずに，ただ当てはめによって求めようとする結果が得られるのだ，という指導のみでは必ずしも十分と言えないのではないだろうか。

初学者であればなおさら，その後，数学的な考え方のよさをしっかりと身に付けるためにも，その根拠となる考え方に繋がる，そして，学習者である生徒に実感ある理解を伴うような指導であるべきである，と考える。

4．平面上の直交座標で線分を内分する点，外分する点

高等学校数学では，数学Ⅱの「図形と方程式」の単元で，座標を用いて平面上の線分を内分する点の位置を表すことを学習することになる。今回改訂された「高等学校学習指導要領（平成30年３月告示）解説「数学編」「理数編」」では，数学Ⅱの第２章の「３ 内容と内容の取扱い」において，次のように記されている。

> （２）図形と方程式
> 図形と方程式について，数学的活動を通して，その有用性を認識するとともに，次の事項を身に付けることができるよう指導すること。
> ア　次のような知識及び技能を身に付けること。
> （ア）　座標を用いて，平面上の線分を内分する点，外分する点の位置や二点間の距離を表すこと。

この記載に続いて，**「内分する点，外分する点の指導に当たっては，これらを別々のものとみるのではなく，線分を与えられた比に分ける点として統合的に捉えたり理解できるようにすることも大切である。」**と書かれている。

平成21年12月の高等学校学習指導要領解説「数学編」「理数編」には，内分する点，外

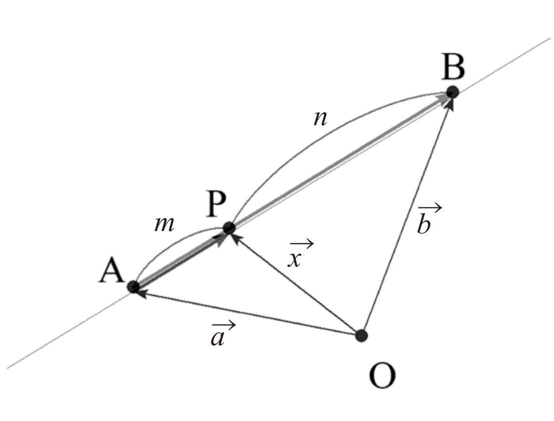
分する点を指導する際に留意する事項としての記載はない。

5．ベクトルを用いて線分を内分する点，外分する点を理解する

今回改訂された新高等学校学習指導要領では数学Cの領域に移行されているが，平面，空間において点の位置関係をベクトルの考え方によって理解を深めることができる。その意味で，ベクトルの考え方はとても重要であるが，初学者にとっては理科（物理）の学習において「向きと大きさ」のあるものとしてベクトルについて学習することもあり，数学における点の位置ベクトルを理解することは，そう容易なことではない。

そうした中で，例えば平面上で３点の位置関係を表す学習単元において，３点が一直線上にある，ということを学習する際に，位置ベクトルを用いて説明することが多い。実は，内分，外分と関連があることがわかる。

図７（内分）



改めて位置ベクトルの考え方で，内分，外分を考察してみる。

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{x}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$　とする。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$　であるから，

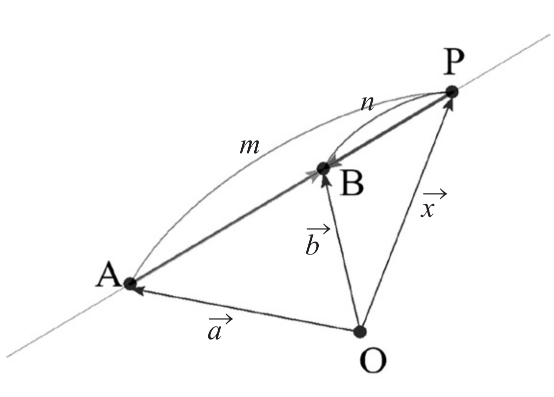
点Pが線分ABを $m:n$ の比に内分するとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と比較して（図７）

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

$$=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

したがって，$\vec{x}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$

図８（外分）$m>n$



外分について，$m>n$のときは，(図８）のように，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}$であるから$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と比較する際，同じ向きのベクトルであることに留意し，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

$$= \frac{-n}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$ したがって，$\vec{x} = \dfrac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m + (-n)}$

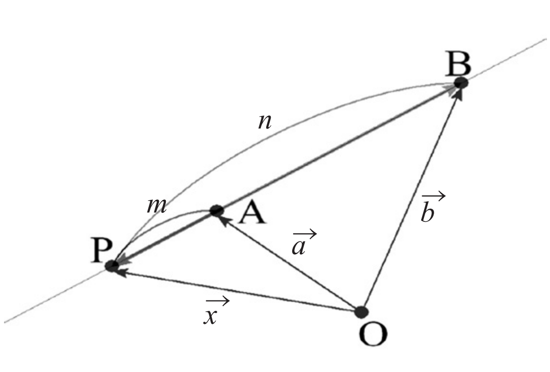
$m < n$ の外分のときは,（図９）のように $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と逆向きのベクトルとなることから,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{n-m}\overrightarrow{\mathrm{BA}}$$

$$= \frac{n}{-m+n}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{-m}{-m+n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

したがって，$\vec{x} = \dfrac{n\vec{a} + (-m)\vec{b}}{-m+n}$

図 9（外分）$m < n$



これらから，当初，線分 AB の内分，外分を考えた際，線分 AB の向きを意識して，特に外分について，負数をうまく用いることで内分を求める式を活用できるという理由が理解できるであろう。

数学的な考え方のよさについて実感的に理解できるよう指導することを心がけたい。

[引用文献，参考文献]

1．幼稚園，小学校，中学校，高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方策等について（答申）　平成28年12月21日：中央教育審議会

2．新しい時代にふさわしい高大接続の実現に向けた高等学校教育，大学教育，大学入学者選抜の一体的改革について～すべての若者が夢や目標を芽吹かせ，未来に花開かせるために～（答申）　平成26年12月22日：中央教育審議会

3．初等中等教育分科会高等学校教育部会　審議まとめ～高校教育の質の確保・向上に向けて～　平成26年６月：中央教育審議会初等中等教育分科会高等学校部会

4．高等学校学習指導要領（平成30年告示）解説　数学編　理数編：文部科学省

5．高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編（平成21年12月）：文部科学省

6．改訂版 数学Ⅱ（平成29年２月14日検定済　文部科学省検定済教科書）：数研出版

7．詳説 数学Ⅱ 改訂版（平成29年２月14日検定済　文部科学省検定済教科書）：啓林館

8．数学Ⅱ Advanced（平成29年２月14日検定済　文部科学省検定済教科書）：東京書籍

9．数学的思考法 説明力を鍛えるヒント：芳沢光雄，講談社現代新書